数理解析研究所講究録
768巻 1991年 139-141

Classical Combinatorics and Elliptic Curves with large rank over $\mathbb{Q}$ —— Néron's method made explicit

立教大理　塩田徹治

標題の前半は、現今の"combinatorics"を殆んど知らない筆者の立場を明らかにして、"combinatorics"のシンポジウムに臨むためにつけたのであるが、一方では、この分野の発祥の地が、19世紀前半から中葉、後半にかけての、近代数学の揺籃期における代数方程式論への群の概念の導入（Galois, Jordan, …）や、幾何学における幾つかの興味ある配置の研究（Cayley, Hesse, Steiner, …）、にあることを想起することは、必ずしも無意味ではなかろうと考えたことによる。

即ち"classical combinatorics"なる言葉によって、algebra, geometry, arithmetic と密接に関係して生ずる combinatorial objects を（漠然と）さしている。この視点は、現代においても（あるいは、計算機が使える現代こそ）かなり有用であるように思う。そしてその一例を提示してみようという次第である。

実は坂内氏からこのシンポジウムで話すようお招きを受けたときは、"Mordell-Weil lattices と Sphere Packings" について話すことを考えた。しかし、これについては'90春の学会で話したことでもある。そこでの話を Introduction として、より立入った話を、或は証明を、すれば意義があろうが、そういう訳にもいくまい。次に "Introduction to Mordell-Weil lattices" とでもいう題で rank の比較的小さい、例えば A_2 を MWL としてもつ elliptic curves (or elliptic surfaces) について話すことも考えてみた。代数幾何に不慣れな combinatorists も居られるだろうから、このような易しい(が重要な) model をとって、MWL の定義と基本的性質を解説することも、無意味ではなかっただろう。

しかし、'90秋の学会においても、MWL の理論と応用について総合講演をする機会があった。その後、以前から一度本格的に調べてみようと思っていた "高い rank をもつ $\mathbb{Q}$ 上の elliptic curves" の構成についての Néron の方法を再考してみた。その結果、この難解とされていた Néron の論文が、実にすぐれた idea (代数幾何と整数論双方にわたる) によっていて、これを MWL の観点から見直すと、"構成のアルゴリズム" まで与えられる(可能)ことが分った。

Néron の方法は、(2次元)射影平面 $\mathbb{P}^2$ の中の3次曲線

と、その上の9個の点の配置についての幾何学的考察から決定する。この状況は、はじめに述べた"classical combinatorics"の考察対象であった $\mathbb{P}^3$ 内の3次曲面上の27本のlines、又は、$\mathbb{P}^2$ 内の4次曲線の28本のdouble tangents、やそれらを包含する所謂del Pezzo曲面の理論(cf. Manin)において、はじめてよく理解される性質のものである。このような標題の前半は、後半によって呼応しうるのである。

実際、このような考えから標記の講演を行い、とくに終りに"rank $\geqq 11$ の $\mathbb{Q}$ 上のelliptic curvesの無限族"の実例の構成を与えた。これは、日本では(世界でも)初めてのものである。rank $\geqq 12$ のものは(存在すら)未知である。

講演を再録する時間的余裕がないので、(後半の)詳細は文献を参照されたい。

―― ◦ ――

Manin, Ju.: Cubic Forms (North Holland).

Néron, A.: Propriétés arithmetiques de certaines familles de courbes algébriques, Proc. ICM 1954, III.

Shioda, T.: Theory of MWL, Proc. ICM 1990 (to appear)

〃 : An infinite family of elliptic curves over $\mathbb{Q}$ with large rank via Néron's method, Preprint (1990)

1/24/'91.